# Module: méthodes Numériques (Analyse numérique)

Introduction générale

Chapitre 1: résolution approchée des équations non linéaires: Bissection, Newton-Raphson, Point-fixe

Chapitre 2: résolution des systèmes d'équations linéaires par des méthodes directs: Cramer, Gauss

Chapitre 3: résolution des systèmes d'équations linéaires par des méthodes indirects : Jacobi ,Gauss-Seïdel

Chapitre 4: les interpolations des fonctions par des polynômes (polynômes d'interpolations): Lagrange , Newton

Chapitres 5: les intégrales Numériques: Trapèze, Simpson

Chapitre 6:Résolution des équations différentielles ordinaires: Euler, Runge-Kutta

# Introduction Générale

## 1-Introduction :

Les méthodes numériques (l’analyse numérique) est une branche des mathématiques appliquées s’intéresse au développement d’outils et des méthodes numériques pour le calcul d’approximations des solutions des problèmes mathématique qu’il serait difficile, voire impossible, d’obtenir par des moyens analytiques, Son objectif est notamment d’introduire des procédures calculatoires détaillées susceptibles d’être mises en œuvre par des calculateurs (électroniques, mécaniques ou humains) et d’analyser leurs caractéristiques et leurs performances.

- Les méthodes de l'analyse numérique s'intéressent à trouver des solutions approximatives aux :

_ Problèmes dont on ignore les exprimer par des expressions analytiques par les éléments de l'analyse mathématique.

_ Les problèmes dont les solutions analytique sont inconnues ou difficiles à obtenir de telle manière qu'on ne peut les utiliser ou les exploiter, par exemple : le calcul des racines des équations non linéaires et transcendantes tel que :

$$a.\cos^2 x + be^x + c = 0$$

_ Les intégrales, les solutions des systèmes d'équations linéaires ou non linéaires (les grands systèmes).

_ Les équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles, par exemple :

$$y''.\cos x + x\,3y' + c\,y = 0, \;\dots\; Etc.$$

- **Moyens d'analyse numérique :**

- Papier et crayon, Calculatrice, Ordinateur**, Algorithmes**

# Chapitre 1 : Résolutions Approchées des équations non-linéaires

**Localisation des racines d'une équation f(x)=0:**

Soit une équation f(x)=0 dont on cherche la solution sur un intervalle [a,b], on commence par un tracé grossier de la fonction sur l'intervalle donnée puis on isole chaque racine dans un sous intervalle le plus étroit possible. La Fig. 1 montre le tracé d'une fonction f qui coupe l'axe des x en trois points, c'est-à-dire que l'équation f(x)=0 possède trois racines, on note les racines exactes par $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ et $\bar{x}_3$.

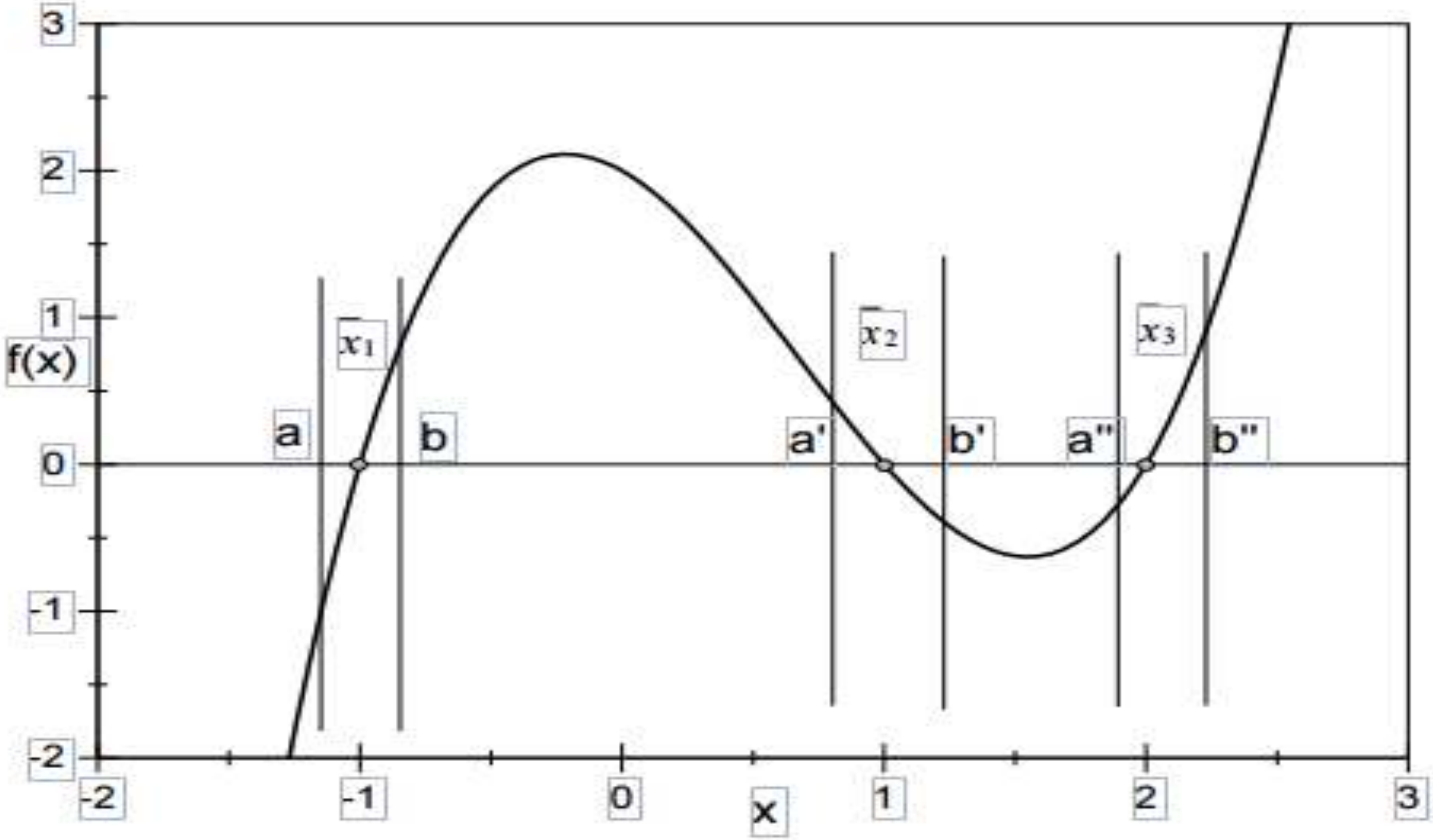



Figure 1 : localisation des racines

- Alors, la recherche des racines réelles isolées de l'équation (1) se fait en général en deux étapes.

1- Séparation des racines : qui consiste à chercher des segments [a, b] les plus petits possibles contenant une et une seule racine de l'équation (1).

2- La recherche d'une valeur approchée de la racine: en utilisant une méthode numérique et avec une précision déterminée.

- Pour réaliser la séparation des racines on fait appel au théorème connu de l'analyse mathématique : (théorème des valeurs intermédiaires).

**Théorème 1 :**

Si une fonction continue $f(x)$ prend aux extrémités de la l'intervalle [a, b] des signes contraires, c.à.d. $f(a).f(b) < 0$ , alors cet intervalle contient au moins une racine de l'équation :

$$f(a) * f(b) < 0 : \exists\ c\ \in ]a, b[\ / f(c) = 0$$

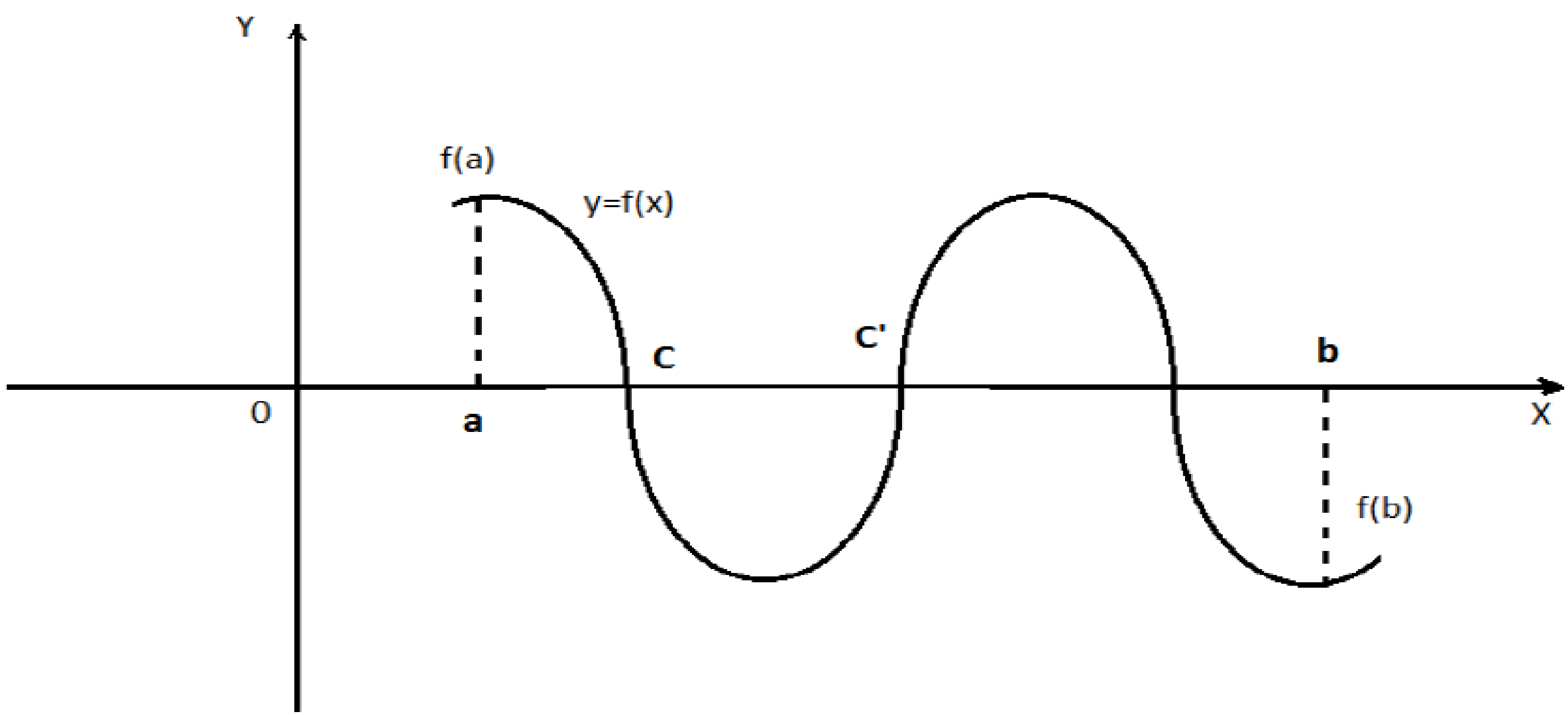
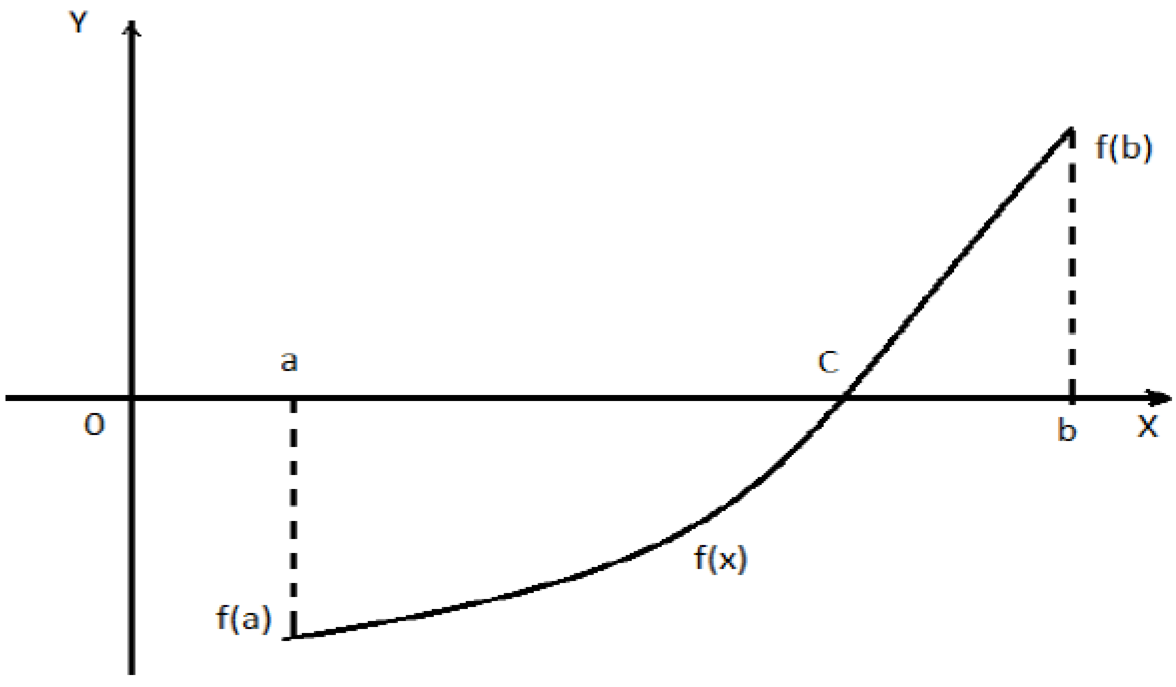



Figure (01)

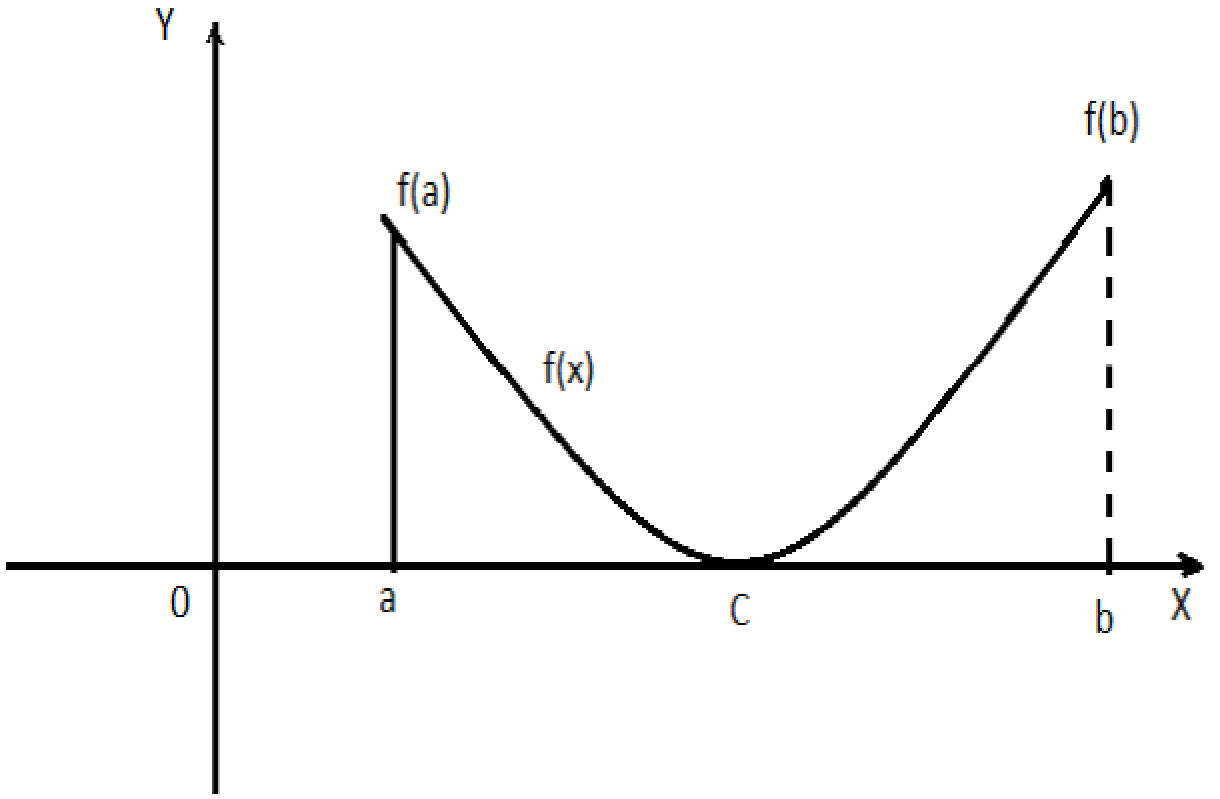
**Remarque :** Si la dérivée $f'(x)$ existe et garde un signe constant dans l'intervalle [a, b] c.à.d. :

$\forall x \in ]a,b[ : f'(x) > 0$ ou $f'(x) < 0$ , alors la racine 'c' est unique.



## Remarque :

Le théorème 1 ne donne que des conditions suffisantes et non nécessaires pour l'existence de racines pour l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle [a, b] :




Figure(03)

## 1.1. Méthode de Bissection (Dichotomie, bipartition) :

Soit l'équation $f(x) = 0$ …….(1)

Où la fonction f(x) est continue sur [a, b], et f(a).f(b)<0.

Pour chercher la racine de l'équation (1) qui appartient à l'intervalle [a,b], divisons ce segment en deux .

Posons $c = \frac{a+b}{2}$ , Si f(c )=0, alors $c = \frac{a+b}{2}$ est racine ;

Si f(x) ≠0, alors si f(a).f((a+b)/2)<0 ,alors la racine appartient à [a, $\frac{a+b}{2}$], sinon Si f((a+b)/2).f(b)<0, alors la racine appartient à [$\frac{a+b}{2}$,b].

Soit le nouveau intervalle contenant la racine [$a_1$ ,$b_1$]

Il est de nouveau divisé en deux, après quoi on reprend le raisonnement précédent. On obtient ainsi à une certaine étape soit une racine exacte de l'équation (1), soit une suite infinie d'intervalles emboîtés $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $[a_3, b_3]$,……. $[a_n, b_n]$, …..

Tels que : $f(a_n).f(b_n)<0$ (n =1,2,3,…..n) et $b_n-a_n=\frac{1}{2^n}(b-a)$ tel que :$c=(\frac{an+bn}{2})$

$c=\lim_{n\to\infty}(an)=\lim_{n\to\infty}(bn)$

$\lim_{n\to\infty} f(an).f(bn)=|f(c)|^2 \leq 0$, il s'ensuit que f(c )=0, c-à-d. que 'c' est racine de l'équation(1).

*Exemple : Calculer la racine de l'équation *tg(x)-x=0*

Dans l'intervalle [4,4.5], avec la précision $\varepsilon=0,001$

$f(4)= -2,82$, $f(4.5)=0,137$, $f(4).f(4.5)<0$

Donc $\exists\, c \in ]4,4.5[\ / f(c) = 0$

| n | $a_n$ | $b_n$ | $c \approx x_n=(a_n+b_n)/2$ | $f(x_n)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 4.5 | 4.25 | -2.24 |
| 2 | 4.25 | 4.5 | 4.375 | -1.52 |
| 3 | 4.375 | 4.5 | 4.4375 | -0.89 |
| 4 | 4.4375 | 4.5 | 4.46875 | -0.4458 |
| 5 | 4.46875 | 4.5 | 4.484375 | -0.174948 |
| 6 | 4.484375 | 4.5 | 4.4921875 | -0.02453 |

On a que $|x_6 - x_5| < \varepsilon=10^{-2}$ donc $c \approx 4 .4921875$

## *Convergence et estimation de l'erreur :

On à déjà montré que la méthode de Bissection est converge vers la solution de l'équation $f(x)=0$ dans l'intervalle [a,b] (Méthode qui converge toujours)

Soit $\alpha$ la solution exacte de f(x)=0 et C la solution approchée, on a que l'erreur :

$$|c-\alpha| \leq \frac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon \qquad (3)$$

_ Si ε est la précision demandée dans la solution de f(x)=0 alors la relation (3) permet de déterminer le nombre d'itérations du calcul par

$$n \geq \frac{\log\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\log 2}$$

$$|c-\alpha| \leq \frac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon$$

*Exemple : $[a, b] = [4, 4.5]$, $\varepsilon = 10^{-2}$

$n = 5,6 \approx 6$ itérations

**Algorithme** : méthode de la Bissection Pour trouver une solution de $f(x)=0$ étant donnée la fonction continue $f$ sur l'intervalle $[a, b]$, où $f(a).f(b) <0$.

**ENTRÉE** les points extrémités $a, b$ ; tolérance $EPS$ .

**SORTIE** solution approchée $\alpha$.

*Etape 1* Poser $X \leftarrow \frac{(a+b)}{2}$

Etape 2 Si $|b - X| \leq EPS$ : $X$ ''est racine approchée '' (*test d'arrêt*)(STOP).

Etape 3 Si $f(X) = 0$ : $X$ ''est racine exacte'' (STOP).

Etape 4 Si $f(a) \cdot f(X) < 0$ Alors

$b \leftarrow X$

Sinon $a \leftarrow X$

Etape 5 Retour à Etape 1.

# 1.2. Méthode Newton-Raphson

# introduction

La méthode de newton-Raphson est une des plus puissants et des plus utilisées méthodes pour la résolution du problème de recherche de racines des équations $f(x)=0$. Il existe au moins trois façon d'introduire la méthode de newton, l'approche la plus commune est de considérer la technique graphiquement. Un autre moyen pour introduire la méthode de newton est basé sur le développement de polynomial de Taylor.

Supposons que la fonction *f(x)* est deux fois dérivable et les dérivées continues sur l'intervalle [a, b], soit $x_0 \in [a,b]$ une approximation à la racine c telle que *f'(x)#0* et $|x_0\text{-c}|$ petit.

Considérons le développement de polynomial de Taylor du premier degré auteur de $x_0$ :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(\xi(x))$$

Où $\boldsymbol{\xi}(x) \in ]x_0, x[$, puisque f(c)=0  en remplaçant $x$ par c on dédient

$$0 = f(x_0) + (x - x_0)f'(x) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(\xi(x))$$

La méthode de newton est formulée à partir de fait de négliger le terme $(x - x_0)^2$ dans l'expression précédente c.à.d. $0 \approx f(x_0) + (x - x_0)f'(x)$

D'où : $c \cong x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, on obtient ainsi une approximation à c meilleur que $x_0$ .

La méthode de newton-Raphson consiste donc à générer suite d'approximation$\{x_n\}$, $n$=1,2,3,……..

Définie par $c \cong x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, n \geq 1$

Soit $x_0$ une approximation de la racine c, et $|x_0\text{-c}|$ petit.

Considérons la tangente à la courbe de $f(x)$ au point $B_0$ $(x_0, f(x_0))$

$Y = f'(x_0)(x-x_0)+ f(x_0)$

Quand y=0 : $x=x_1$ :

$$0 = f'(x_0)(x_1-x_0) + f(x_0) \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Répétons la procédure au point $B_1(x_1,f(x_1))$ la tangente au point $B_1(x_1,f(x_1))$

$Y=f'(x_1)(x-x_1)+f(x_1)$

Quand y=0 : $x=x_2$ :d'où

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$….. et ainsi de suite

On obtient une suite d'approximation $x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots . x_n = \{x_n\}$, $n$=1,2,3,……..

Tel que $x_n \cong x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$ , $n \geq 1$

---

**Remarque* : cette suite est convergente s'il converge vers la racine c de l'équation *f(x)=0*.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n-1} - \frac{f(lim x_{n-1})}{f'(lim x_{n-1})}$$

**L'interprétation géométrique :**

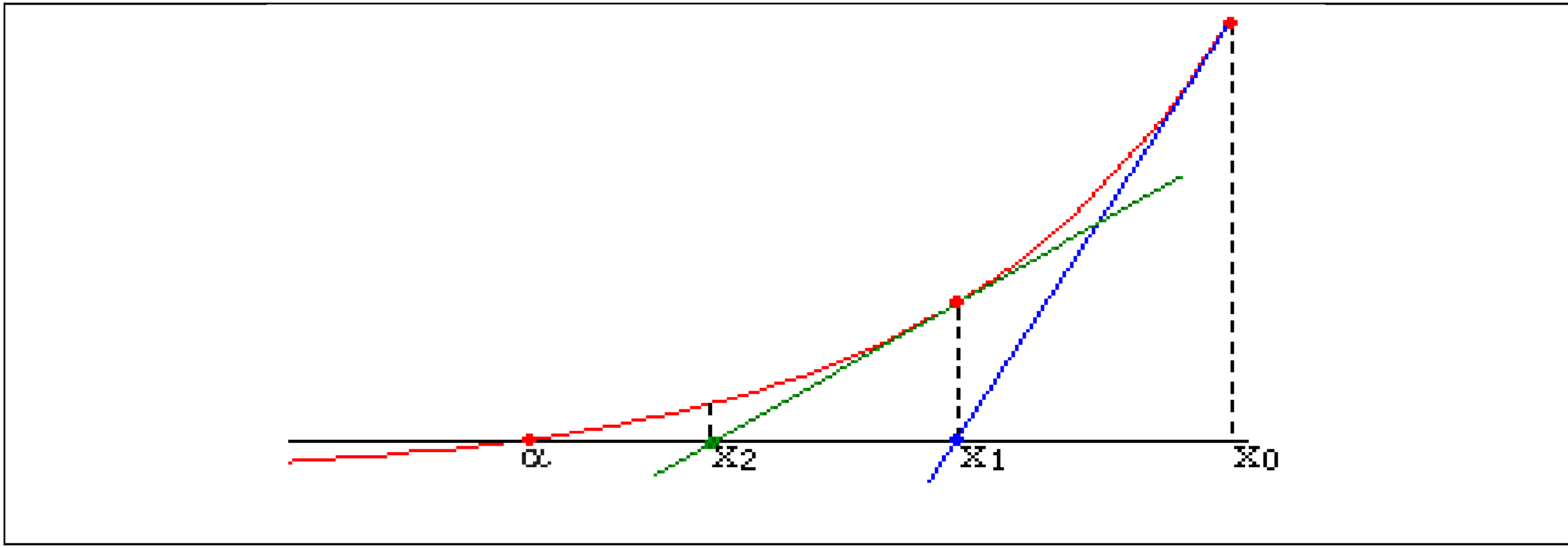



Figure (04)

Supposons que les dérivées premières et secondes gardent des signes constants dans l'intervalle [a, b] : supposons aussi que l'on a $f'(x) > 0$ et $f''(x) > 0$ et que $f(b) > 0$

_ choisissons $x_0$=b tel que $f(x_0)\, f''(x_0) > 0$

_ menons par le point $B_0(x_0, f(x_0))$ la tangente à la courbe $g = f(x)$. Fig. (04)

Soit $x_1$ point d'intersection de la tangente avec l'axe O$x$

Menons par le point $B_1(x_1, f(x_1))$ la tangente, dont l'abscisse du point d'intersection donnera la deuxième approximation $x_2$ de la racine c, etc.……

L'équation de la tangente au point $B_n(x_n, f(x_n))$, $n = 1,2,3,$……..

S'écrit

$Y - f(x_n) = f'(x_n)(x-x_n)$

En posant dans cette équation y=0, $x=x_{n+1}$, on obtient la formule :

$$x_{n+1} \cong x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

***Remarque*** : (cas de divergence _ figure 05)

-Si dans le cas considéré graphiquement, on adopte $x_0$=a et par conséquent $f(x_0).f''(x_0) <0$ , graphiquement le point $x_1$ sera situé hors de l'intervalle [a, b] (voir figure) c.à.d. que le choix de la valeur initiale n'est pas approprié.

Donc une «bonne » approximation initiale $x_0$ est celle qui vérifie l'inégalité. $f(x_0).f''(x_0)>0$

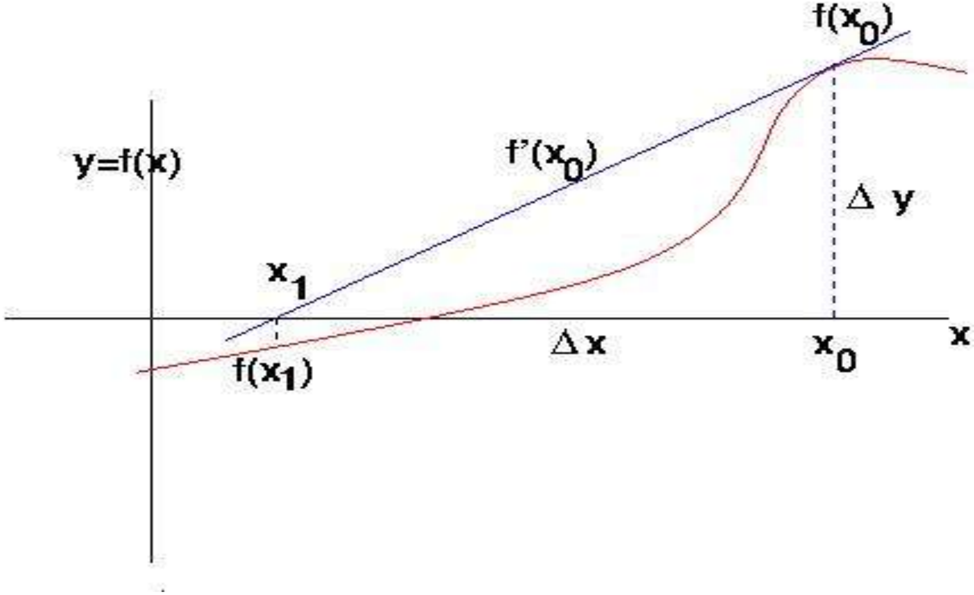



Figure (05)

Théorème :

Si $f$ est définie et continue sur [a, b], tel que

1 $f(a).f(b) < 0$

2 et $f'(x)$ garde un signe constant

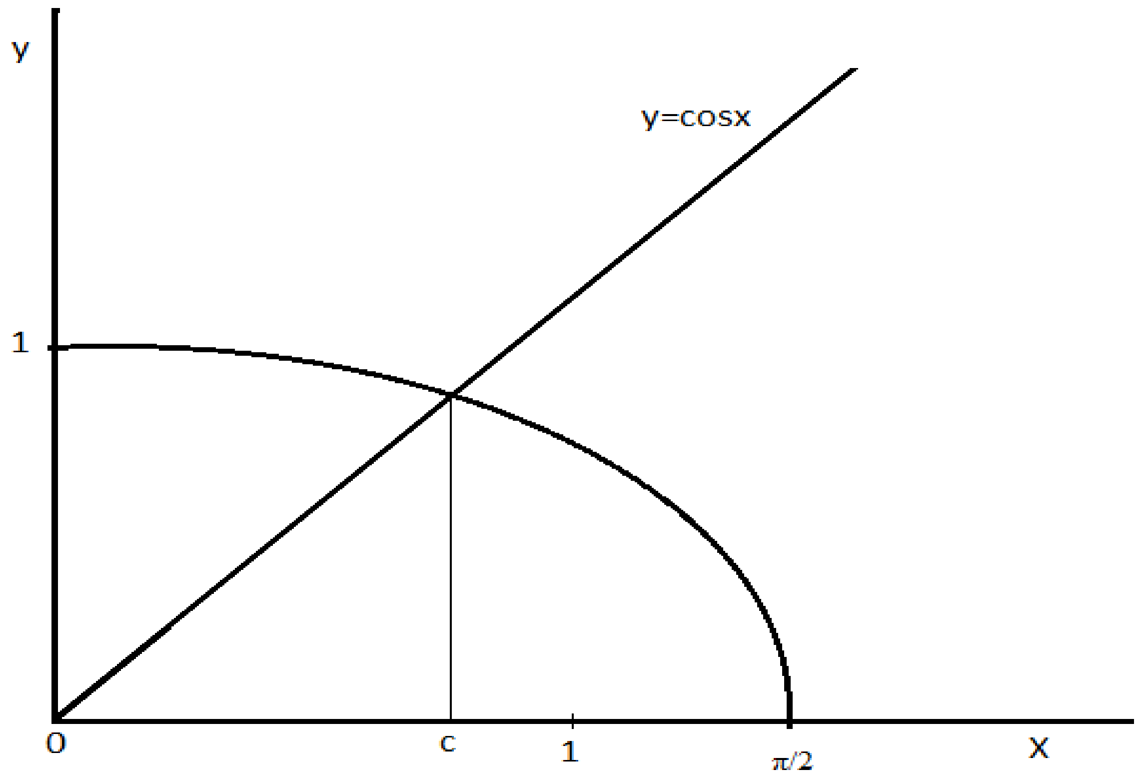
3 et $f''(x)$ garde un signe constant

Alors le théorème de Newton-Raphson est convergente vers la racine unique de l'équation $f(x)=0$, avec la précision aussi grande que l'on veut, en partant de l'approximation initiale qui satisfait : $f(x_0).f''(x_0) > 0$.

*Exemple : chercher la solution de l'équation $x = \cos x$

Soit $f(x) = \cos x - x$

On a $\left.\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -\frac{\pi}{2} \\ f(0) &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \exists c \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \ / \ f(c) = 0$



$f$(x) possède une racine unique dans [0,π/2] puisque $f'(x) = -\sin x - 1 < 0$

La méthode de Newton prend la forme

$$x_n \cong x_{n-1} - \frac{(\cos x_{n-1} - x_{n-1})}{(-\sin x_{n-1} - 1)}, n = 1,2,3, \ldots$$

Posons $x_0 = \pi/4$

| n | $x_n$ | | $\lvert x_n - x_{n-1} \rvert$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.7853981635 | $x_0$ | |
| 1 | 0.7395361337 | $x_1$ | |
| 2 | 0.7390851781 | $x_2$ | Donc |
| 3 | 0.7390851332 | $x_3$ | $C \approx x_3 = 0.7390851332$ |
| 4 | 0.7390851332 | $x_4$ | |
| 5 | 0.3790851332 | $x_5$ | |

**Algorithme 1.2** : Newton-Raphson

Pour trouver une solution de f(x)=0 étant donnée la fonction *f* continue sur l'intervalle [a,b] où $f(a).f(b)<0$, et $f(x_0).f''(x_0)>0$ où $x_0$ est la valeur initiale.

**Entrée** : le point initial $x_0$, la tolérance EPS

**Sortie** : solution approchée c

Etape 1 : poser $x_{n+1} \leftarrow x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ , $n \geq 1$

Etape 2 : si $|x_{n+1}-x_n| \leq$ EPS : $x_{n+1}$ est racine approchée (STOP)

Etape 3 : si $|x_{n+1}-x_n| \geq$ EPS alors

$$x_n \longleftarrow x_{n+1}$$

Etape 4 : retour à l'étape 1.

# 1.3. Méthode Point-Fixe

## 1.3. Méthode du point fixe : (approximations successives)

Une des méthodes parmi les plus importantes de résolutions numérique des équations est la méthode du point fixe

Voici son principe : soit l'équation : $f(x)=0$ .....(1)

Où f(x) est une fonction continue. Le problème à déterminer ses racines réelles. Remplaçons l'équation (1) par une équation équivalente : $x = g(x)$.....(2)

$(f(x) = x - g(x))$

**Définition :**

si une fonction g définie dans [a,b] et s'il existe c∈[a,b] telque c=g( c) , alors c est dit point-fixe de la fonction g.

Sélectionnons par un moyen quelconque une valeur grossièrement approchée de la racine $x_0$ et portion le dans le 2ème membre de l'équation (2) ; alors on obtient un certain nombre

$$x_1 = g(x_0)\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Puis remplaçons dans le 2ème membre de (3) $x_0$ par $x_1$ pour obtenir $x_2 = g(x_1)$, puis $x_3 = g(x_2)$,......on aboutit aussi à la suite des nombres :

$$x_n = g(x_{n-1}) \quad ( n=1,2,3,\ldots..), \ldots(4)$$

Si cette suite est convergente , c.à.d. s'il existe une limite : $c = \lim_{n\to\infty}(x_n)$ alors en passant à la limite dans l'équation (4) et en supposant que la fonction g(x) est continue :

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_{n-1}) = g(\lim_{n\to\infty}(x_{n-1}))$$

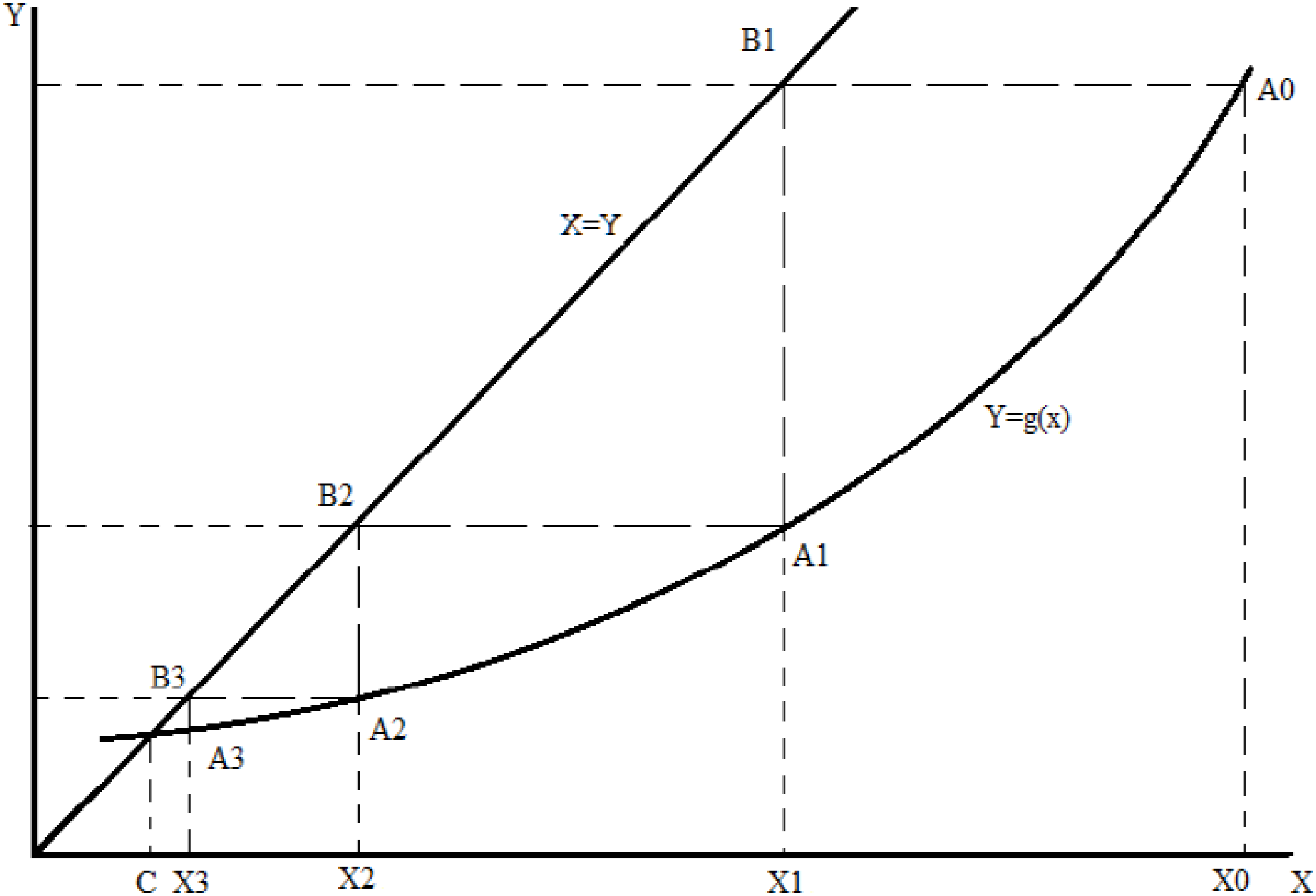
c.à.d. $c=g(c)$

Donc la limite c est la solution de l'équation (2)

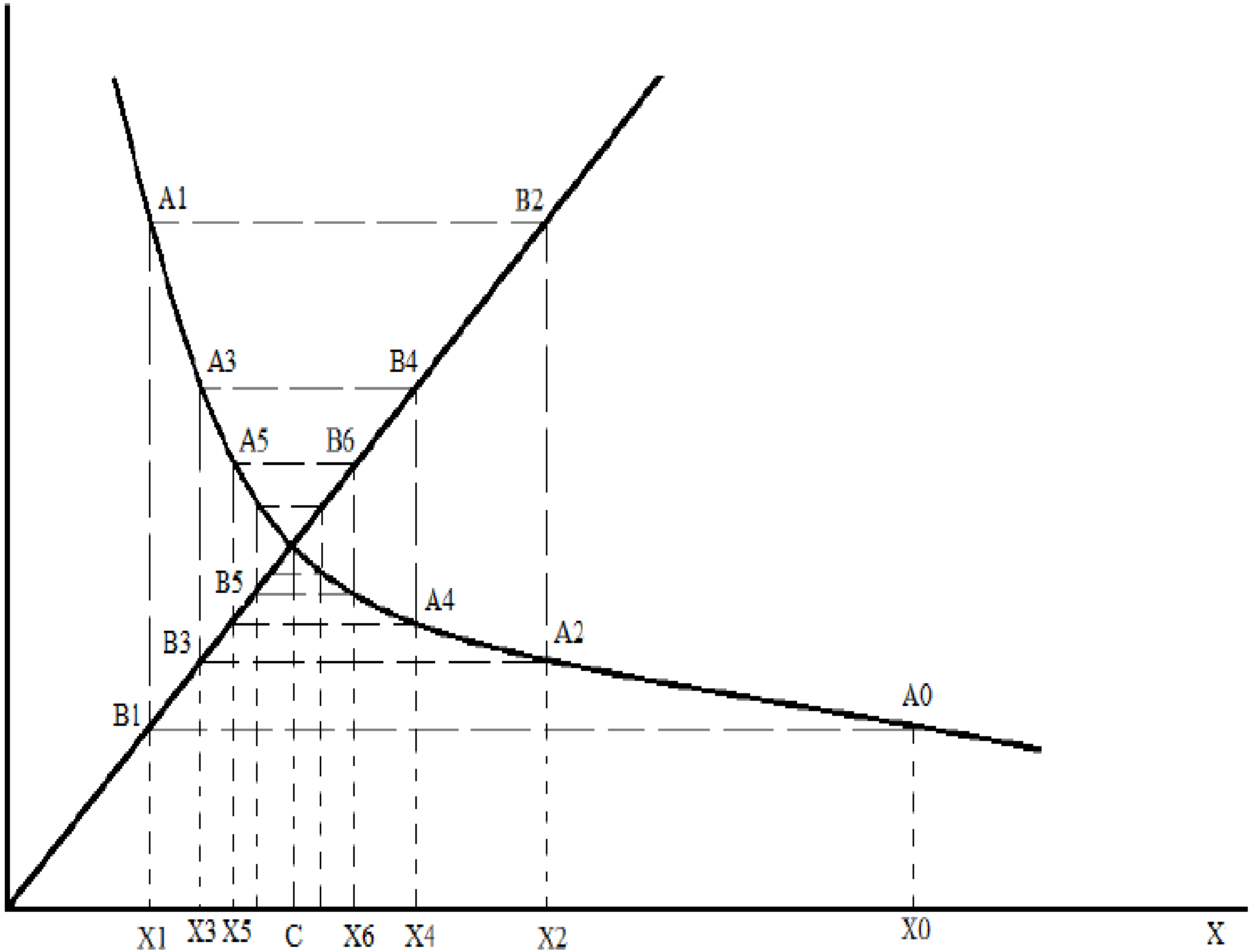
Donc la limite c est le point fixe de la fonction g

## 1.3.2. L'interprétation géométrique :

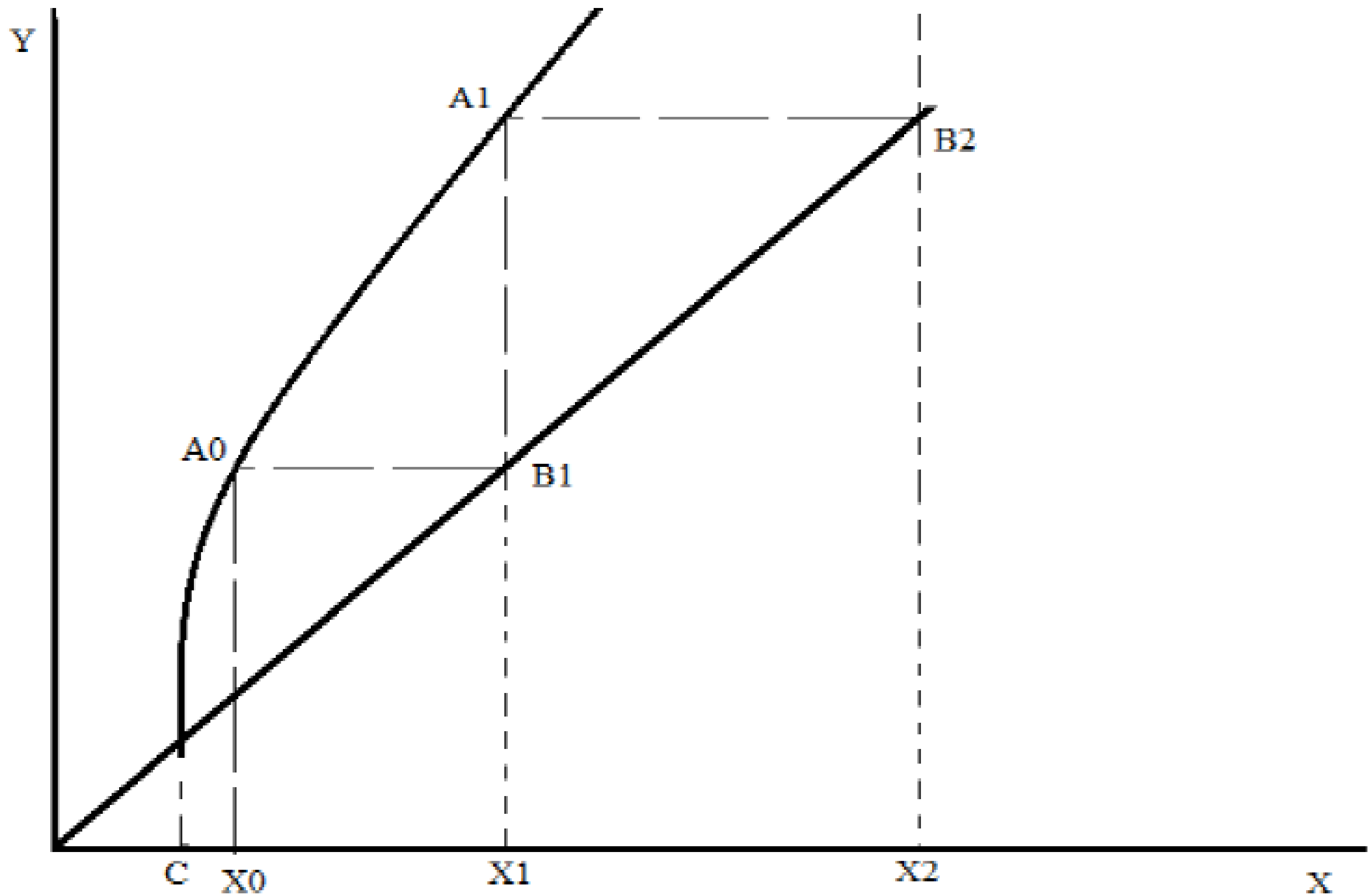
On construit dans le plan XOY les courbes des fonctions $y=x$ et $y=g(x)$. Le point fixe de la fonction g est l'abscisse du point d'intersection des 2 courbes $y=x$ et $y=g(x)$ .




($\varphi'(x) > 0$, au voisinage de c $|\varphi'(x)| < 1$)




Convergence en « Spirale »




Processus divergent ($|\varnothing'(x)|>1$)

Si $|\varphi'(x)|>1$ le processus peut être divergent pour nombre possible l'application des approximations successives (point fixe), il faut définir les conditions suffisantes de convergence du processus itératif.

## *Exemple :

Soit l'équation $x^3-2 = 0$, [1,2]. Il existe plusieurs manières de transformer l'équation sous la forme $x = g(x)$ . Par exemple on peut obtenir :

a) $x = g_1(x) = x^3+x-2$
b) $x = g_2(x) = \frac{1}{5}(2 + 5x - x^3)$,….etc

Appliquons la méthode itérative du point fixe pour $x_0=1,2$

| n/Xn | (a) | (b) |
|---|---|---|
| 0 | 1.2 | 1.2 |
| 1 | 0.928 | 1.2544 |
| 2 | -0.273 | 1.2596 |
| 3 | -2.293 | 1.2599 |
| 4 | -16.349 | 1.25992 |

Divergence convergence rapide

On conclut que le choix de la fonction g(x) est important quant à la convergence et la divergence du processus itératif.

**Théorème 1** : (conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité du point fixe).

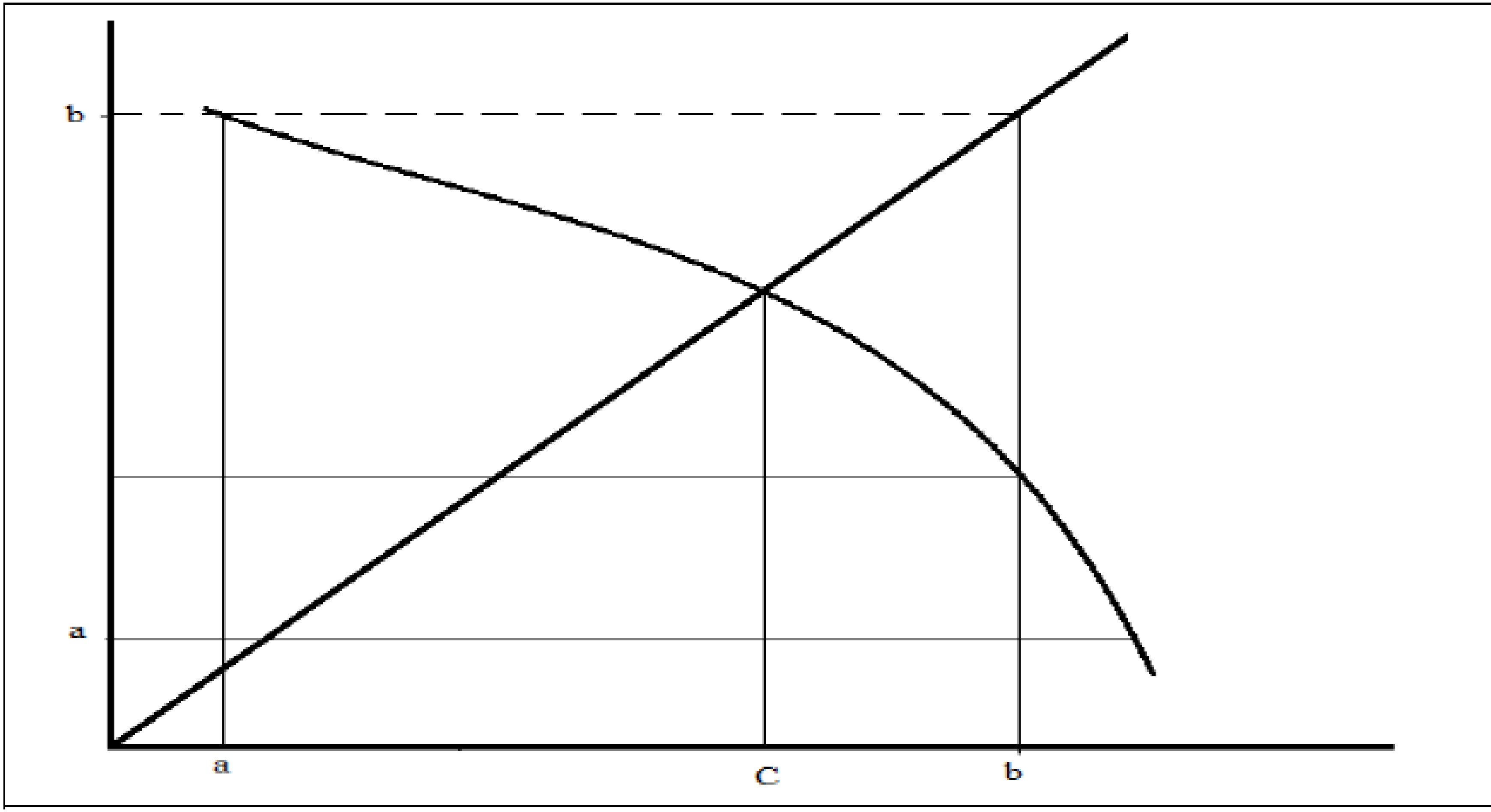
Si une fonction $g \in C[a, b] et\ g(x) \in [a, b] \forall x \in [a, b]$

(g :[a,b]→[a,b]), alors g possède un point fixe dans [a,b].

En plus, supposons que g'(x) existe sur [a,b] et telle que

$|g'(x)| \leq K < 1\ \forall x \in [a, b]$

Alors : g possède un point fixe unique $c \in [a, b]$


b
a
a
C
b

## Théorème 2 :

Soit g $g \in C[a,b] et\ g(x) \in [a,b] \forall x \in [a,b]$

En plus si g'(x) existe sur [a,b] avec

$|g'(x)| \leq k < 1\ \forall x \in [a,b]$.

Si $x_0$ est un nombre quelconque $\in [a,b]$, alors le processus itératif défini par $x_n = g(x_{n-1})$ (n=1,2,3,…) vers la racine unique (point fixe) $c \in [a,b]$

## Remarque :

Sous les conditions du théorème 2, la méthode itérative du point fixe converge ∀ le choix de la valeur initiale $x_0 \in [a,b]$ . il en résulte que cette méthode est auto-corrective

## Estimation de l’erreur :

On démontre que l’erreur commise vérifie la relation

$|x_n - c| \leq \frac{k}{1-k}|x_n - x_{n-1}| \quad (|c - x_n| \leq \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|$, n≥1)

Si k ≤ ½ on a : $|c - x_n| \leq |x_n - x_{n-1}|$

Si $|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon \rightarrow |c - x_n| \leq \varepsilon$

# FIN

**Du chapitre I**